MAI 1 – 12. cvičení – „písemné" (náhradní za 14.5.2020)

Určitý integrál

1. Newtonův integrál – „shrnutí" (definice, existence)

(i) fce f má v (a,b) primitivní funkci F $(a<b,\ a,b\in\mathbb{R})$ a existují $\lim\limits_{x\to a+} F(x) = F(a^+)\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to b-} F(x) = F(b^-)$, pak

$$(N)\int_a^b f(x)dx = F(b^-) - F(a^+) \quad \left(= \left[F(x)\right]_a^b \right)$$

spec., když F je spojitá v $\langle a,b\rangle$, je $(N)\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

(ii) f je spojitá v $\langle a,b\rangle \Rightarrow (N)\int_a^b f(x)dx$ („stručněji" $(N)\int_a^b f$) existuje $(f\in N(a,b))$

(iii) „vlastnosti" $(N)\int_a^b f$:

$f,g\in N(a,b) \Rightarrow f+g\in N(a,b)$ a $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

$c\in\mathbb{R},\ f\in N(a,b) \Rightarrow cf\in N(a,b)$ a $\int_a^b cf = c\int_a^b f$

$f\in N(a,b),\ \alpha\in(a,b)$, pak $f\in N(a,\alpha)$ i $f\in N(\alpha,b)$

a $\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^b f$

(iv) pro „výpočet" $\int_a^b f(x)dx$ – potřebujeme primitivní funkci $F(x)$ v (a,b) (nebo v $\langle a,b\rangle$) a konečné $F(a^+)$, $F(b^-)$

a metody výpočtu primitivní funkce – per partes a substituci lze „kopírovat" i pro určitý $(N)\int_a^b f$ – viz přednáška a příklady.

Per partes: f', g' spojité v $[a,b]$, pak

$$(N)\int_a^b f'g = [fg]_a^b - (N)\int_a^b fg'$$

Substituce (pozor na kontrolu předpokladů!)

$$(N)\int_a^b f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \quad , \text{ když}$$

φ je spojitá v $[a,b]$, ex. φ' v (a,b), a když $J = \varphi((\alpha,\beta))$, „$f$ je spojitá na J a f má integrál (N), ve vnitřku J"

- jednoduché „užití" pro $\varphi'(t)$ spojité v $[a,b]$, a $\varphi'(t) \neq 0$ v $[a,b]$ (pak lze užít substituci i v „opačném" smyslu)

2. Integrál Riemannův - „stručně"

(i) f je definována v $[a,b]$, $a<b$, $a,b \in R$;
$f \in R(a,b)$, když $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in R$, pak

$$(R)\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f \left(= \underline{\int_a^b} f \right) \quad \text{(definice viz přednáška)}$$

(horní R-integrál $\overline{\int_b^a} f$ - infimum tzv. horních R-sum $(S(f,D)$, D-dělení $[a,b])$

a dolní R-integrál $\underline{\int_a} f$ - supremum t.zv. dolních R-sum $(s(f,D)$)

(ii) • $f \in R(a,b) \Rightarrow$ f je omezená na (a,b)
(tj. neomezené fce na (a,b) nemají $(R)\int_a^b f$)

• f spojitá na $[a,b] \Rightarrow f \in R(a,b)$ a

$$(R)\int_a^b f = (N)\int_a^b f$$

(platí i toto:
$f \in N(a,b) \cap R(a,b) \Rightarrow (R)\int_a^b f = (N)\int_a^b f$)

• spec: $\underline{f \in C(a,b) \Rightarrow f \in N(a,b) \cap R(a,b)}$

• f je monotonní v $[a,b] \Rightarrow f \in R(a,b)$

(iii) <u>vlastnosti</u> (plynou z definice)

• $f, g \in R(a,b) \Rightarrow f+g \in R(a,b)$ a $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

$c \in R,\ f \in R(a,b) \Rightarrow c \cdot f \in R(a,b)$ a $\int_a^b cf = c\int_a^b f$

• $f \in R(a,b),\ \alpha \in (a,b) \Rightarrow f \in R(a,\alpha)$ i $f \in R(\alpha,b)$ a

$$(R)\int_a^b f = (R)\int_a^\alpha f + (R)\int_\alpha^b f$$

(hodí se pro „počítání" integrálů)

• $f, g \in R(a,b),\ f(x) \leq g(x)$ v $[a,b] \Rightarrow (R)\int_a^b f \leq (R)\int_a^b g$

(iv) výpočet: $f \in C(a,b)$, pak $(R)\int_a^b f = (N)\int_a^b f = [F]_a^b$

(F je primit. k f v (a,b))

Příklady

1. K definici $(R)\int_a^b f(x)dx$:

- $\int_0^1 e^x dx$ existuje jako Riemannův i Newtonův
  ($f(x)=e^x$ je spojitá v $\langle 0,1\rangle$)

- $(N)\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e-1$

- zkusme „naší" definici $(R)\int_0^1 e^x dx$ –

  rovnoměrné dělení D_n intervalu $\langle 0,1\rangle$:

  $$D_n:\ 0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{n-1}{n}<1$$

  horní součty (R) jsou: $\underline{S(f,D_n)} = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} =$

  $$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \underline{\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}\,\frac{1-e^{\frac{n+1}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}}}$$

  (částečný součet geometrické řady)

a protože $(R)\int_0^1 e^x dx$ existuje, je

$$\underline{(R)\int_0^1 e^x dx} = \overline{\int_0^1} e^x dx = \lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}}_{\to(-1)} \cdot \underbrace{\left(1-e^{\frac{n+1}{n}}\right)}_{\to 1-e}\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{n}}}_{\to 1}$$

(základní limita $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$)

$$= \underline{e-1} \quad (\text{dále})$$

1. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ – existuje v (R) i (N) smyslu

funkci $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ v $(0,1\rangle$ můžeme dodefinovat spojitě $f(0)=1$, ale primitivní funkci, nemůžeme vyjádřit pomocí elementárních funkcí – pak se integrál počítá „přibližně" – „numericky"

3. Příklady na „nestandardní" počítání určitých integrálů:

a) • $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ (integrál existuje jako R i N – f je spojitá v $\langle 0,1\rangle$)

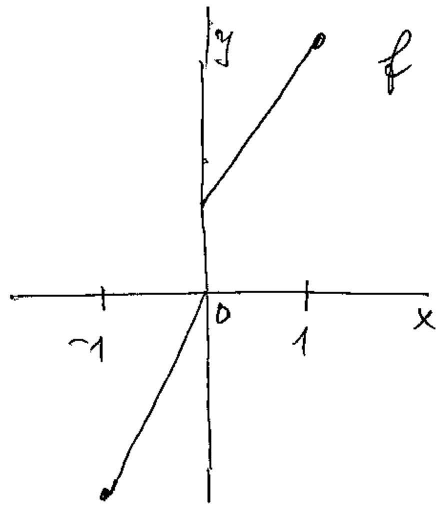
• $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\arcsin x\right]_0^1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ – ale tento integrál je jen (N), neboť funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ není omezená v $\langle 0,1)$!

• $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \langle -1,0\rangle \\ 2x+1, & x \in (0,1\rangle \end{cases}$; f je omezená v $\langle -1,1\rangle$, tedy ex. $R\int_{-1}^{1} f$, ale nemá Darbouxovu vlastnost v $\langle -1,1\rangle$,

f tedy nemá v $\langle -1,1\rangle$ primitivní funkci (ani v $(-1,1)$)

ale pro výpočet $R\int_{-1}^{1} f$ můžeme využít „aditivity" $R\int_a^b f$:

$$(R)\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = (R)\int_{-1}^{0} 2x\,dx + (R)\int_{0}^{1} (2x+1)\,dx$$, a integrály v $(-1,0)$ i v $(0,1)$ už jsou i (N):



tedy:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[x^2\right]_{-1}^{0} + \left[x^2+x\right]_{0}^{1} =$$

$$= (0-1) + (2-0) = 1$$

• $\displaystyle\int_0^5 |x^2-3x+2|\,dx$ – existuje jako (N) i (R) integrál

($f(x) = |x^2-3x+2|$ je spojitá v $\langle 0,5\rangle$,
ale pro výpočet je nutné opět interval „rozdělit" podle znaménka" x^2-3x+2 :

$$|x^2-3x+2| = |(x-2)(x-1)| = \begin{cases} x^2-3x+2 & \text{v } \langle 0,1\rangle \cup \langle 2,5\rangle \\ -(x^2-3x+2) & \text{v } (1,2) \end{cases}$$)

$$\text{tedy} \int_0^5 |x^2-3x+2|\,dx = \int_0^1 (x^2-3x+2)\,dx - \int_1^2 (x^2-3x+2)\,dx + \int_2^5 (x^2-3x+2)\,dx = \dots\dots$$

b) <u>užití substituce</u> (jednoduché" příklady na začátek)

• $$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^4 e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'\,dx = 2\int_1^2 e^t\,dt = 2\left[e^t\right]_1^2 = 2(e^2-e)$$

existuje (R) i (N)
(f je spojitá v $\langle 1,4\rangle$)

$\varphi(x) = t$: $\varphi'(x) > 0$ v $\langle 1,4\rangle$
spojitá
$\varphi(1) = 1$, $\varphi(4) = 2$

• ale $\underline{(N)\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx} \underset{\text{substituce}}{=} 2\int_0^2 e^t\,dt = 2\left[e^t\right]_0^2 = \underline{2(e^2-1)}$

existuje už jen jako (N), neboť $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ je neomezená v $(0,4\rangle$

($\lim\limits_{x\to 0+} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = +\infty$!)

• $\underline{\int_2^3 \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx} \underset{\text{substituce}}{=} -\int_2^3 \ln\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'dx =$

$\frac{1}{x} = t$

$x = 2 \to t = \frac{1}{2}$

$x = 3 \to t = \frac{1}{3}$

(integrál N i R – spojitá fce v $\langle 2,3\rangle$)

$= -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \ln t\,dt = \left(\frac{1}{2} > \frac{1}{3}\right)$ (dle rozšiřové definice)

$= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \ln t\,dt \underset{pp}{=} \left| \begin{matrix} u' = 1, & u = t \\ v = \ln t, & v' = \frac{1}{t} \end{matrix} \right| = \left[t\ln t\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} t\cdot\frac{1}{t}\,dt =$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{3}\right) - \left[t\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \underline{\frac{1}{3}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}$

• $\underline{\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx} = \left[e^{\sin x}\right]_{-\pi}^{\pi} = e^0 - e^0 = 0$

(N i R – spojitá fce v $\langle -\pi,\pi\rangle$

$F(x) = \int e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx = e^{\sin x}$ (snadno) a rychleji i při substituci:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin x}(\sin x)'dx = \int_0^0 e^t dt = 0 \text{ (dle def.)}$$

lze tedy uvažovat substituci

$\sin x = t$

pak $x = -\pi \to t = 0$

$x = \pi \to t = 0$

a jsou splněny i předpoklady věty o substituci

Ale v $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx$ (existuje jako R i N-spojitá fce) musíme dát pozor! Při doporučené substituci $\operatorname{tg} x = t$ – chybí bod $x = \frac{\pi}{2}$,

ale kdybychom „propočítávali" mechanicky, pak i zde $x = 0 \to t = 0$ $(= \operatorname{tg} 0)$

$x = \pi \to t = \operatorname{tg} 0 = 0$!

ale tohle nemůže být dobře!

(promyslete, že je-li $f(x) > 0$ v $\langle a,b\rangle$ (a spojitá zde všude), pak $(R)\int_a^b f > 0$ (pro $f \in R(a,b)$))

A jak je třeba tento integrál „spočítat" – tedy primitivní fci na $\langle 0,\pi\rangle$, která existuje, „slepit" (viz cvičení 11 – jako příklad), nebo užít aditivitu:

$$\int_0^{\pi} f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f$$

V minulém cvičení jsme spočítali primitivní funkci k

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x} \quad v \ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right): \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x) + c_0$$

a systém primitivních funkcí lze „spojovat" dle periodicity (s periodou π) fce f i v dalších intervalech, zde v $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$,

tedy:
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\underbrace{\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x}_{\to +\infty}\right) - 0\right) + \left(0 - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\underbrace{\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x}_{\to -\infty})\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \pi$$

<u>pozn:</u> vezmeme-li primitivní funkci $F(x)$ v $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ (dostali jsme ji „slepením" v bodě $x = \frac{\pi}{2}$):

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x), & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2}, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,\operatorname{tg} x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\pi, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases},$$

pak
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx = \left[F(x)\right]_0^{\pi} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pi + 0\right) - 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \pi$$

(opět)

K předním příkladům přidám "ještě" několik aplikací, a další a příklady ze "zadání" příkladů ke cvičení 12., kde se užití "vlastností" $R \int_a^b f$, doplním v další části cvičení (písemného) a v řešení úloh z domácího úkolu 12.

Aplikace určitého integrálu:

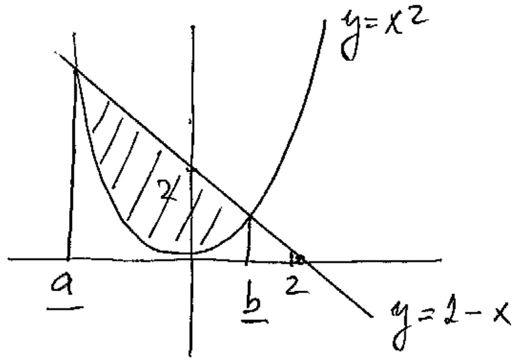
1. Obsah rovinné oblasti $\omega = \{ [x,y] \in R^2;\ x \in \langle a,b \rangle,\ f(x) \le y \le g(x) \}$

$f,g \in R(a,b)$, pak

$$S(\omega) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

(i) ? obsah (omezené!) rovinné oblasti, která je ohraničená grafy funkcí

$y = x^2$ a $y = 2 - x$



$$S = \int_a^b [(2-x) - x^2]\,dx \quad -$$

– a potřebujeme ještě „meze" a, b, tj. souřadnice průsečíků paraboly a přímky:

$$x^2 = 2 - x \iff x^2 + x - 2 = 0$$

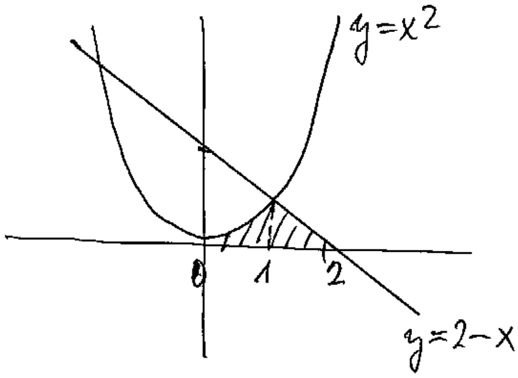
$$(x+2)(x-1) = 0,$$

tj. $a = -2,\ b = 1$

$$a \quad S = \int_{-2}^{1} ((2-x) - x^2)\,dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - \frac{4}{2} - \frac{(-8)}{3}\right) = \ldots$$

(ii) ? obsah (omezené!!) rovinné oblasti, která je ohraničená grafy funkcí $y=x^2$, $y=2-x$ a osou x:



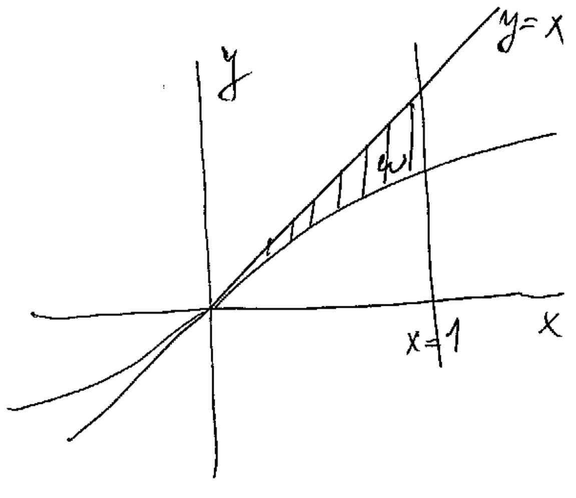
(oblast, kterou značíme, musí být omezená – omlouvám se, v zadání zde jsem to zapomněla napsat)

zde máme oblast „shora" omezenou dvěma různými grafy, tedy průsečíkem ji rozdělíme:

$$S=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(2-x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=$$

$$=\frac{1}{3}+\left[(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

(iii) ? obsah omezené rovinné oblasti ω, která je ohraničená grafem funkce $y=\operatorname{arctg} x$, tečnou k tomuto grafu v $[0,0]$ a přímkou $x=1$.



rovnice tečny ke grafu fce $\operatorname{arctg} x$ v $[0,0]$ je $y=x$ ($y=f(0)+f'(0)\cdot x$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$)

tedy,

$$S(\omega)=\int_0^1(x-\operatorname{arctg} x)\,dx=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1\operatorname{arctg} x\,dx=\frac{1}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

a

$$\int_0^1\operatorname{arctg} x\,dx\underset{PP}{=}\left[x\operatorname{arctg} x\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\left[x\operatorname{arctg} x\right]_0^1-\frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

2. Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti
$\omega = \{ [x,y];\ x \in \langle a,b \rangle;\ 0 \le y \le f(x) \}$ kolem osy x
(předpokládáme, že f je spojitá v $\langle a,b \rangle$). Pak je objem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

(pokud budete potřebovat trochu vysvětlit „cestu" k tomuto vzorci i k návodu minulému (pro výpočet obsahu rovinné oblasti), mohu to napsat podrobněji, nebo můžeme mít i online konzultaci.)

(i)? objem rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti
$\omega = \{ [x,y];\ x \in \langle 1,e \rangle,\ 0 \le y \le \ln x \}$ kolem osy x:

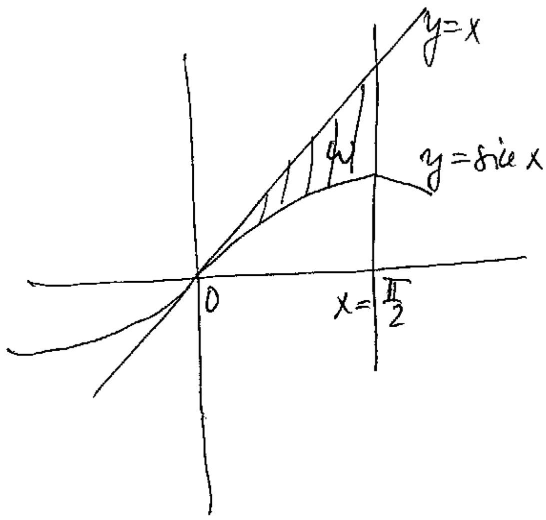
$$V = \pi \int_1^e \ln^2 x\,dx \underset{pp}{=} \left| \begin{matrix} u' = 1, & u = x \\ v = \ln^2 x, & v' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \pi \left(\left[x \ln^2 x \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln x\,dx \right) \underset{pp}{=} \left| \begin{matrix} u' = 1, & u = x \\ v = \ln x, & v' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \pi \left(\left[x \ln^2 x \right]_1^e - 2 \left(\left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx \right) \right) =$$

$$= \pi \left\{ e - 2(e - (e-1) \right\} = \underline{\pi (e-2)}$$

(ii) ? objem rotačního tělesa, které vznikne rotací omezené oblasti ω kolem osy x, kde ω je ohraničená grafem fce $y = \sin x$, tečnou k tomuto grafu v $[0,0]$ a přímkou $x = \frac{\pi}{2}$:



$V = V_1 - V_2$, kde

$$V_1 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx, \quad V_2 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

$$V_1 = \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left(\frac{\pi^3}{24}\right)$$

$$V_2 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

tj. $\underline{V = V_1 - V_2 = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)}$.

3. Délka grafu funkce $y = f(x)$, pro $x \in \langle a,b \rangle$, předpokládáme, že je $f'(x)$ spojitá v $\langle a,b \rangle$, pak

$$\underline{l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}$$

(často na vyjádření „nepříjemné" integrály, tak může jen „málo" příkladů v zadání)

Určete délku grafu funkce $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$:

$$f(x) = \ln(\cos x)\,, \quad f'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\operatorname{tg} x\,,$$

tj. $$l = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx \overset{*}{=}$$

asi „klasickou" substituci

$\operatorname{tg} x = t$ - zde jsou (tj. v $\langle 0, \frac{\pi}{6}\rangle$) předpoklady věty splněny

(jde o substituci v opačném „směru")

$\operatorname{tg} x = t$

$x = \operatorname{arctg} t \equiv g(t)$

$dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad \left(g'(t) = \frac{1}{1+t^2}\right)$

„změna" mezí:

$x = 0 \to t = 0$

$x = \frac{\pi}{6} \to t = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\overset{*}{=} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \quad \text{(„tabulka")}$$

$$= \left[\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+\frac{1}{3}}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \ln(\sqrt{3})$$

„Zatím" vše, ještě „přidám" další příklady.